DIPLÔME NATIONAL DU BREVET
SESSION DE 2006

SUJET

Série Collège

MATHÉMATIQUES **Durée 2 h 00** **coef. : 2**

LA RÉDACTION ET LA PRÉSENTATION SONT PRISES EN COMPTE POUR 4 POINTS.

LES CALCULATRICES SONT AUTORISÉES.

Partie numérique

Exercice 1

Dans cet exercice, les étapes des calculs doivent être détaillées.

1. $A = \dfrac{\dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{5}}{\dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{10}}$

Calculer A et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

2. $B = \dfrac{4{,}5 \times 10^{-5} \times 13 \times 10^{-3}}{0{,}9 \times 10^{-12}}$

Donner l'écriture scientifique de B.

Exercice 2

On considère l'expression littérale suivante :

$D = (2x - 3)^2 + (5x - 7)(2x - 3)$

1. Développer et réduire D.

2. Calculer D pour $x = 0$ puis pour $x = \dfrac{3}{2}$

Exercice 3

1. a) Résoudre l'inéquation suivante :

$7x - 2 > 3x + 6$

b) Représenter les solutions sur une droite graduée, en hachurant la partie de la droite qui ne représente pas les solutions.

2. Résoudre l'équation $3(5x - 7)(x - 2) = 0$

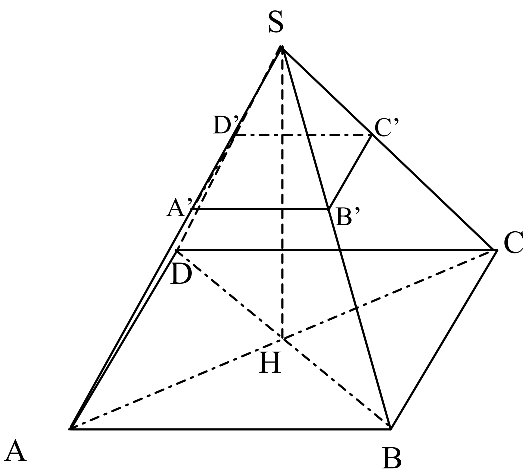
Exercice 4

Les nombres 13 et 75 sont-ils premiers entre eux ? Justifier la réponse.

Partie géométrie

Exercice 1

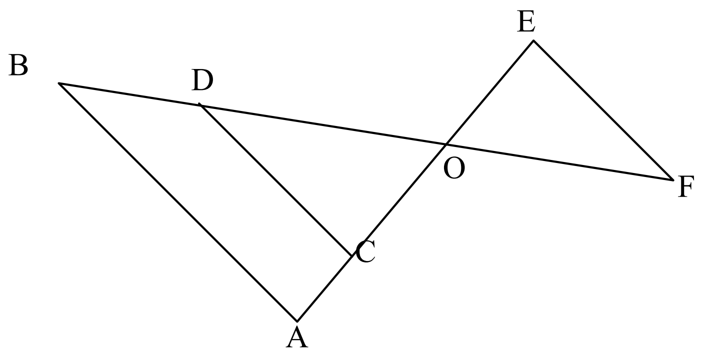
Sur la figure ci-après, *SABCD* est une pyramide à base rectangulaire de hauteur [*SH*], où *H* est le centre du rectangle *ABCD*. On donne :
$AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm et $SH = 12$ cm.



1. calculez AC ; en déduire AH.
2. Calculez le volume de la pyramide *SABCD*.
3. Démontrez que $SA = 13$ cm.
On note *A'* le point de [*SA*] tel que $SA' = 3{,}25$ cm. On coupe la pyramide par le plan parallèle à la base et passant par *A'*.
On obtient une pyramide *SA'B'C'D'*.
4. a/ Calculez le coefficient de réduction de *SA'B'C'D* par rapport à *SABCD*.
b/ En déduire les longueurs *A'B'* et *B'C'* puis le volume *SA'B'C'D*.

Exercice 2

Sur le dessin ci-dessous, les droites (*AB*) et (*CD*) sont parallèles, les points *A*,*C*,*O*,*E* sont alignés ainsi que les points *B*, *D*, *O* et *F*.
(*On ne demande pas de faire le dessin*)
De plus, on donne les longueurs suivantes :
$CO = 3$ cm, $AO = 3{,}5$ cm, $OB = 4{,}9$ cm ; $CD = 1{,}8$ cm ; $OF = 2{,}8$ cm et $OE = 2$ cm.



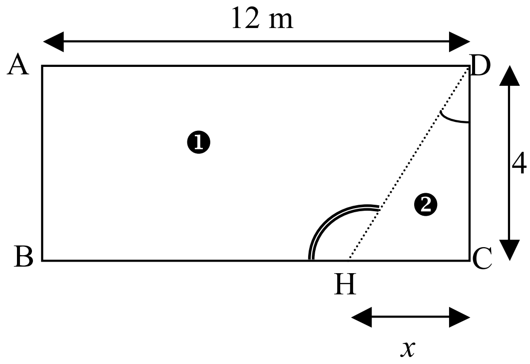
1. Calculez en justifiant *OD* et *AB*.
2. Prouvez que les droites (*EF*) et (*AB*) sont parallèles.

Exercice 3

Soit ABC un triangle tel que :
$AB = 4{,}2$ cm, $BC = 5{,}6$ cm et $AC = 7$ cm.

1. Faire une figure en vraie grandeur.
2. Prouvez que *ABC* est rectangle en *B*.
3. Calculez le périmètre et l'aire de *ABC*.

PROBLEME



On dispose d'un séjour rectangulaire dans lequel on veut réaliser un petit cagibi triangulaire. Pour cela, on veut installer une cloison.
Voici ci-contre une représentation de la pièce.

• La partie ❷ est le cagibi et la partie ❶ représente le séjour après la création du cagibi.
• La cloison a été représentée en pointillés.
• Dans l'exercice, on considérera que la cloison a une épaisseur nulle.

(*Les trois parties sont indépendantes.*)

Partie I

On considère ici que $x = 3$m.

1. Quelle est la longueur de la cloison ?

2. Calculer la valeur (à 1° près) de l'angle $\widehat{HDC}$.

3. Calculer la valeur (à 1° près) de l'angle $\widehat{DHB}$.

Partie II

1.a. Exprimer la surface au sol du cagibi ❷ en fonction de x, sous la forme f(x) = ...
b. Exprimer la surface au sol du séjour ❶ en fonction de x, sous la forme g(x) = ...

2. On admet que $f(x) = 2x$ et que $g(x) = 48 - 2x$.
a. Quelle est la nature de la fonction f ?
Quelle est la nature de la fonction g ?
b. Tracer dans un repère (en abscisses: 1cm pour 0,5 unité ; en ordonnées: 1cm pour 5 unités) la représentation graphique de la fonction g pour x compris entre 0 et 10.

3. On veut que le séjour ❶ ait une surface minimale de 35m^2.
a. Lire sur le graphique la valeur maximale de x pour que cette condition soit respectée.
b. Ecrire une inéquation qui traduise que la surface du séjour doit être supérieure ou égale à 35m^2.
c. Résoudre cette inéquation.

Partie III

On réalise une maquette de cette pièce, avant la création du cagibi, à l'échelle 1/200.

1. Rappeler ce que signifie « échelle 1/200 ».
2. Quelle sera, sur la maquette, la longueur du mur de 12 m ?
3. La surface réelle du séjour est de 48 m^2. Quelle est la surface du sol du séjour dans la maquette (en cm^2) ?
4. Le volume du séjour de la maquette est 13,125cm^3. Quel est le volume réel du séjour (en cm^3, puis en m^3) ?

Correction de la partie numérique.

Exercice 1

1. A = $\dfrac{\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{5}}{\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{10}}$

A = $\dfrac{\dfrac{20}{15}-\dfrac{6}{15}}{\dfrac{25}{10}+\dfrac{3}{10}}$

A = $\dfrac{\dfrac{14}{15}}{\dfrac{28}{10}}$

A = $\dfrac{14}{15}\times\dfrac{10}{28}$

A = $\dfrac{14\times2\times5}{3\times5\times2\times14}$

$\boxed{\textbf{A} = \dfrac{1}{3}}$

2. B = $\dfrac{4{,}5\times10^{-5}\times13\times10^{-3}}{0{,}9\times10^{-12}}$

B = $\dfrac{4{,}5\times13\times10^{-3}\times10^{-5}}{0{,}9\times10^{-12}}$

B = $65\times\dfrac{10^{-8}}{10^{-12}}$

B = $65\times\dfrac{10^{12}}{10^{8}}$

B = 65×10^{4}

$\boxed{\textbf{B = 6,5}\times10^{5}}$

Exercice 2

1. Je développe et je réduis

D = $(2x - 3)^2 + (5x - 7)(2x - 3)$

D = $4x^2 - 12x + 9 + 10x^2 - 15x - 14x + 21$

$\boxed{\mathbf{D = 14x^2 - 41x + 30}}$

2. **<u>Pour $x = 0$</u>**

D = $14\times0^2 - 41\times0 + 30$

$\boxed{\mathbf{D = 30}}$

Pour $x = \dfrac{3}{2}$

D = $\left(2\times\dfrac{3}{2} - 3 \right)^2 + \left(5\times\dfrac{3}{2} - 7 \right)\left(2\times\dfrac{3}{2} - 3 \right)$

D = $(3 - 3)\,2 + \left(5\times\dfrac{3}{2} - 7 \right)(3 - 3)$

D = $0 + \left(5\times\dfrac{3}{2} - 7 \right)\times0$

$\boxed{\mathbf{D = 0}}$

Exercice 3

1. a. $7x - 2 > 3x + 6$

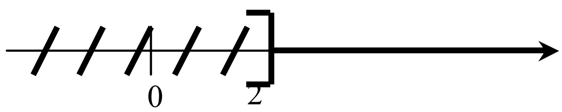
$7x - 2 - 3x > 3x - 3x + 6$

$4x - 2 > 6$

$4x - 2 + 2 > 6 + 2$

$4x > 8$

$\boxed{\mathbf{x > 2}}$



<u>Les solutions sont tous les nombres supérieurs strictement à 2</u>

2. $3 (5x - 7)(x - 2) = 0$

un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

soit $5x - 7 = 0$

$5x - 7 + 7 = 0 + 7$

$5x = 7$

$\boxed{x = \dfrac{7}{5}}$

$x - 2 = 0$

$x - 2 + 2 = 0 + 2$

$\boxed{x = 2}$

Exercice 4

Cherchons le PGCD de 13 et de 75 par l'algorithme d'Euclide.

$75 = 13 \times 5 + 10$

$13 = 10 \times 1 + 3$

$10 = 3 \times 3 + 1$

$3 = 3 \times 1 + 0$

Le PGCD étant le dernier reste non nul, c'est 1 donc 13 et 75 sont premiers entre eux.

Partie Géométrie

Exercice 1

1. Le triangle est rectangle (car ABCD est un rectangle), nous pouvons utiliser le théorème de Pythagore

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 8^2 + 6^2$

$AC^2 = 100$

$\boxed{AC = \sqrt{100} = 10cm}$

$\boxed{AH = \frac{AC}{2} = \frac{10}{2} = 5cm}$ car dans un rectangle les diagonales se coupent en leur milieu.

2. Le volume d'une pyramide est donnée par la formule suivante :

$V_{SABCD} = \frac{Aire\ de\ la\ base \times hauteur}{3}$

$V_{SABCD} = \frac{6 \times 8 \times 12}{3}$

$\boxed{V_{SABCD} = 192cm^3}$

3. SAH est rectangle en H car (SH) est une hauteur de cette pyramide.
D'après le théorème de Pythagore :

$SH^2 + AH^2 = SA^2$

$12^2 + 5^2 = SA^2$

$169 = SA^2$

$\sqrt{169} = SA$

$\boxed{SA = 13cm}$

4. **a/** Le coefficient de réduction est donnée par la formule : $\boxed{\frac{SA'}{SA} = \frac{3,25}{12} = \frac{1}{4} = 0,25}$

b/ On déduit que A'B' = $\frac{1}{4}AB$ = 2 cm , B'C' = $\frac{1}{4}BC$ = 1,5 cm et SH' = $\frac{1}{4}SH$ = 3 cm.

$\boxed{V_{SA'B'C'D'} = \frac{A'B' \times B'C' \times SH'}{3} = \frac{2 \times 1,5 \times 3}{3} = 3\text{ cm}^3}$

On peut également utiliser le coefficient de réduction : 0,25

$V_{SA'B'C'D}' = 0,25^3 \times V_{SABCD} = 0,25^3 \times 192 = 3\text{ cm}^3$

Exercice 2

1. • Nous sommes dans une configuration de Thalès
   • O,D,C et O,C,A sont alignés dans le même ordre
   • (DC) $\parallel$ (AB)

Donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{OD}{OB}=\frac{OC}{OA}=\frac{DC}{BA}$$

$$\frac{OD}{4{,}9}=\frac{3}{3{,}5}=\frac{1{,}8}{BA}$$

$$\frac{OD}{4{,}9}=\frac{3}{3{,}5} \text{ et } \frac{3}{3{,}5}=\frac{1{,}8}{BA}$$

$$\frac{OD}{4{,}9}\times 4{,}9=\frac{3}{3{,}5}\times 4{,}9 \text{ et } \frac{3{,}5}{3}=\frac{BA}{1{,}8}$$

$$\frac{OD}{4{,}9}\times 4{,}9=\frac{3}{3{,}5}\times 4{,}9 \text{ et } \frac{3{,}5}{3}\times 1{,}8=\frac{BA}{1{,}8}\times 1{,}8$$

$$OD=\frac{21}{5} \text{ et } \frac{21}{10}=BA$$

$$\boxed{OD=4{,}2cm \text{ et } BA=2{,}1cm}$$

2. On a :

• $\dfrac{OE}{OA}=\dfrac{2}{3{,}5}=\dfrac{20}{35}=\dfrac{4\times 5}{5\times 7}=\dfrac{4}{7}$

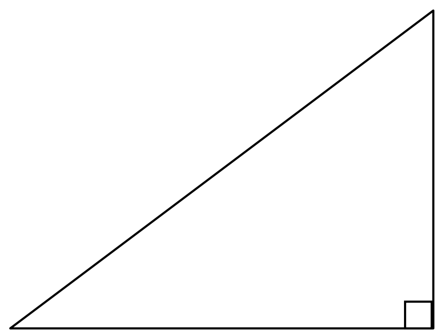
• $\dfrac{OF}{OB}=\dfrac{2{,}8}{4{,}9}=\dfrac{4\times 7}{7\times 7}=\dfrac{4}{7}$

Comme :

• Nous sommes dans une configuration de Thalès
• B,O,F et A,O,E sont alignés dans le même ordre
• $\dfrac{OE}{OA}=\dfrac{OF}{OB}=\dfrac{4}{7}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (BA) et (EF) sont parallèles.

Exercice 3



1. Voir la figure ci-contre.

2. • $AB^2+BC^2=4{,}2^2+5{,}6^2=49$

• $AC^2=7^2=49$

Ainsi $AB^2+BC^2=AC^2=49$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en B.

3. $P_{ABC} = AB+BC+AC$

$= 4{,}2 + 5{,}6 + 7 = 16{,}8$ cm.

$\text{Aire}_{ABC} = \dfrac{\text{Base} \times \text{hauteur}}{2}$

$= \dfrac{5{,}6\times 4{,}2}{2}$

$= 11{,}76 \text{ cm}^2$

Corrigé du problème

Partie I

1. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle DCH rectangle en H :
$DH^2 = DC^2 + HC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$
$DH = \sqrt{25} = 5$m.

Appliquons la trigonométrie dans ce même triangle :

2. $\tan \widehat{HDC} = \dfrac{3}{4}$ donc $\widehat{HDC} = \tan^{-1}(\dfrac{3}{4}) \approx 37°$ (au degré près).

3. $\tan \widehat{DHC} = \dfrac{4}{3}$ donc $\widehat{DHC} = \tan^{-1}(\dfrac{4}{3}) \approx 53°$ (au degré près).

$\widehat{DHB} + \widehat{DHC} = \widehat{CHB} = 180°$ car $\widehat{CHB}$ est un angle plat

Ainsi : $\boxed{\widehat{DHB} = 180 - \widehat{DHC} = 180 - 53 = 127°}$

Partie II

1.a. Le cagibi est un triangle rectangle : $f(x) = \dfrac{4 \times x}{2} = 2x$.

b. Pour obtenir l'aire du séjour, on ôte celle du cagibi à celle de la pièce :
$g(x) = (12 \times 4) - (2x) = 48 - 2x$.

2.a. f est une fonction linéaire et g est une fonction affine.

b. $f(10) = 2 \times 10 = 20$. On obtient le point (10 ; 20) en ayant choisit $x = 0$ arbitrairement.
$g(0) = 48 - 2 \times 0 = 48$ et $g(10) = 48 - 2 \times 10 = 28$.
On obtient les points (0 ; 48) et (10 ; 28). D'où la représentation graphique.

3.a. Il suffit de lire pour quelle valeur de x l'aire $g(x)$ est égale à 35 : $x = 6{,}5$m.

b. $g(x) \geq 35$ => $48 - 2x \geq 35$.

c. $48 - 2x \geq 35$
$-2x \geq 35 - 48$
$-2x \geq -13$
$x \leq \dfrac{-13}{-2}$ (on divise par un nombre négatif, attention au changement de sens de l'inégalité)
$\boxed{x \leq 6{,}5}$.

Partie III

1. Échelle 1/200$^{\text{éme}}$: 1cm représente 200cm en réalité, c'est-à-dire 2m.

2. 12m = 6 × 2m sera représenté par 6 × 1cm, à savoir 6cm.

   Une échelle est un coefficient de réduction, les aires seront donc divisées par 200^2 et les volumes seront divisés par 200^3 sur la maquette :

3. $A_{\text{séjour dans la maquette}} = 48 \div 200^2 = 0{,}0012\text{m}^2 = 12\text{cm}^2$.
4. $V_{\text{réel du séjour}} = 13{,}125 \times 200^3 = 105\,000\,000\text{cm}^3 = 105\text{m}^3$.